Строгое доказательство *Совершенства* первых 98 Масок. (Решение «проблемы числа 3»)

А.Корнюшкин
Москва
email: kornju@mail.ru

Завершено доказательство *Совершенства* для первых 91 нормальной Маски в одном измерении и 7 нормальных Масок в двух измерениях (это притом, что все центрально симметричные маски не различаются и считаются за одну). Указан метод для доказательства *Совершенства* (предположительно) любой соответствующей Маски (*являющейся Совершенной*).

1. Введение

Эта работа представляет собой продолжение работ [1]-[3] и содержит полное доказательство *Совершенства* Масок (окрестностей) изображённых на рисунке 1. Как оно выглядит с самого начала?..

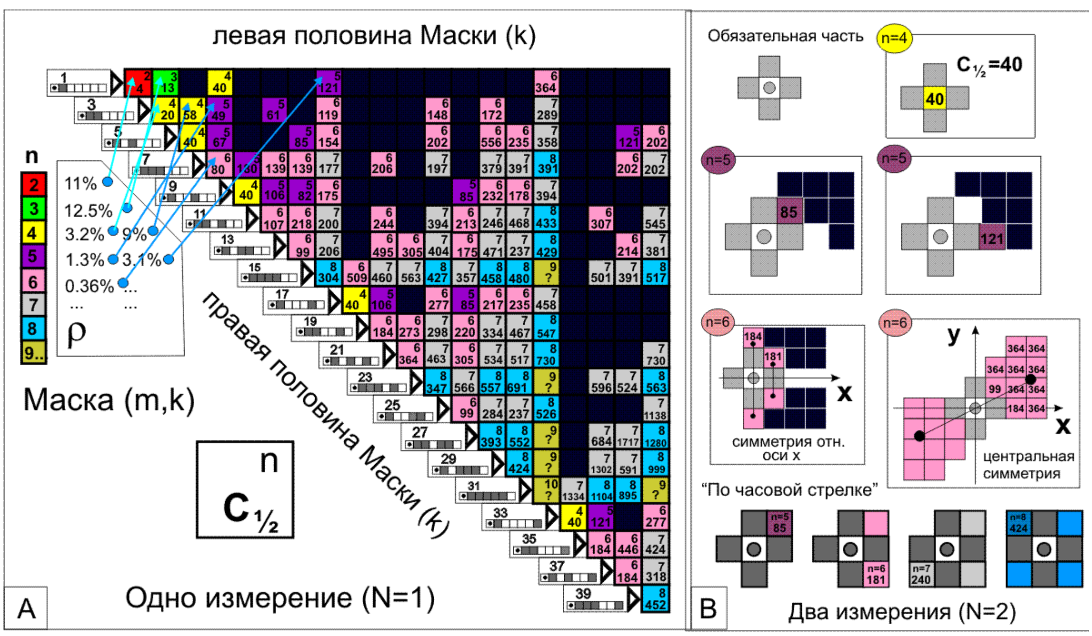

Рис. 1. Набор первых *Совершенных* Масок в одном и двух измерениях [1]. Напомним, n – число клеток в Маске, а число $c=2*c_{1/2}+1$ – число строк в Таблице Перехода этой Маски.

Предварительно доказывается одна небольшая (но важная) Лемма. Лемма для всех *Нормальных* Масок. А потом доказательство осуществляется отдельно, для каждой Маски, на компьютере, в три этапа. Первые два подробно описаны в [1]. Мы кратко повторим их, расскажем о последнем – «третьем», а, заодно, поговорим о «проблеме числа 3» с самого начала.

2. Определение *традиционного* Клеточного Автомата (КА) и Таблицы Перехода

Традиционный КА – это у нас, по определению, одноплоскостной **Клеточный Автомат** по времени, на N- мерном (в общем случае) Гиперпараллелепипеде (противоположные стороны могут либо замыкаться в тор либо продолжаться до бесконечности); и зависящий, в момент времени t+1, от некой окрестности данной клетки в момент времени t. Большинство всех КА – «традиционные».

Для работы любого КА надо задать (определить) 5 вещей...

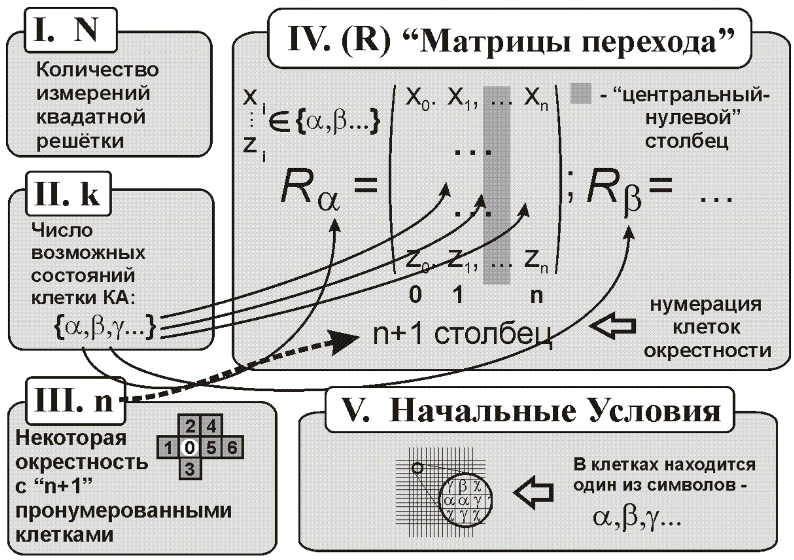

Рис. 2. Что нужно определить для работы любого *традиционного* КА.

I. N- размерность вашей квадратной сетки и размеры границ вашего КА.
II. k- число возможных состояний клетки.
III. n- число пронумерованных клеток в вашей окрестности и саму окрестность.
IV. Таблицы Перехода – ***R*** с соответствующим индексом. Они задают: каким будет значение КА в следующий момент времени. И индекс таблицы, и их содержание (элементы) принадлежат набору из **II**. Для каждой клетки, в каждый момент времени, мы выписываем (в соответствии с нумерацией **III**) строку и сравниваем её с содержимым Таблиц Перехода. Находим нужную, и берём её индекс. Он то и будет следующим значением Автомата.
V. Начальные условия.

После того, как вы всё это задали, можно запускать свой КА и следить за его изменениями.

Свойства любой Таблицы Перехода:

1) Положение строк в ТП не имеет значения.
2) Число столбцов в ТП равняется n +1, где n – число точек в пронумерованной окрестности.
3) В каждой ТП есть «выделенный» столбец (отвечающий за центральную точку). На рисунках он выделяется серым цветом.
4) Все строки – и в одной ТП, и в остальных – различаются между собой.
5) Максимальная сумма строк всех ТП должна быть меньше (или равна) k^{n+1}. (2^{2+1}=4+4 – для Автомата «Правило 30» (рис 3А); 2^{8+1}=372+140 – для Автомата «Жизнь» (рис 3Б)). Если каких-то строк недостаёт, то вы должны объяснить, почему их не может появиться при работе КА.

На рис. 3. приведены примеры традиционных КА.

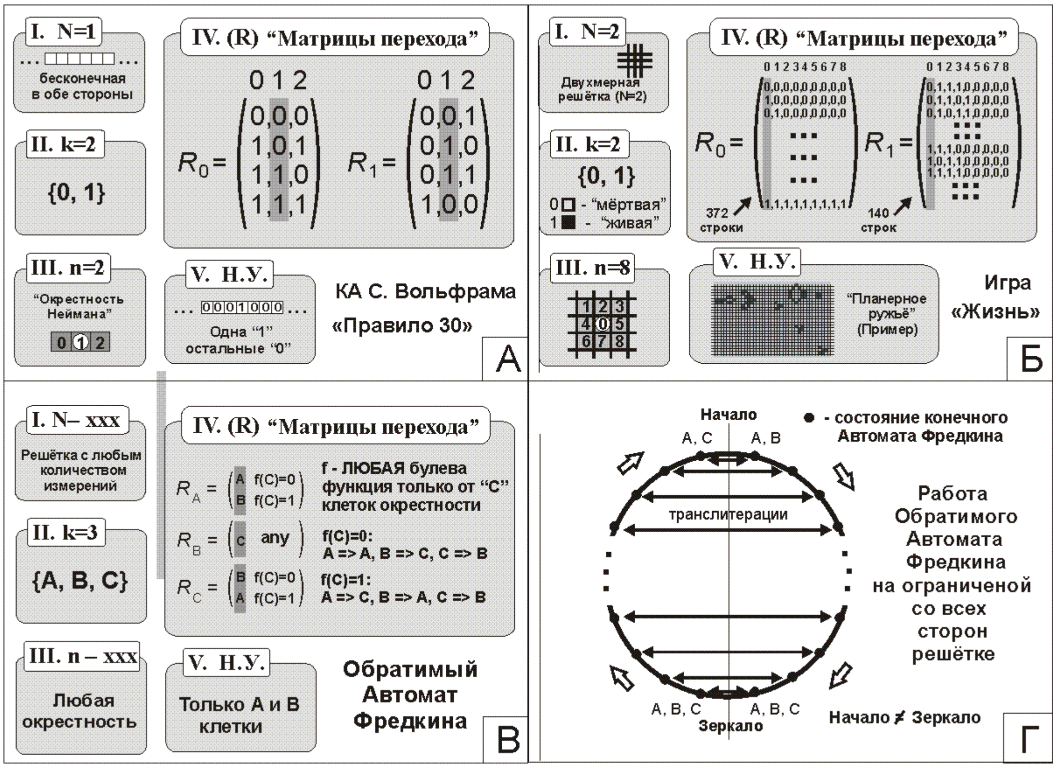

Рис. 3. Примеры (с Таблицами Перехода) *традиционных* КА. 3А – КА С. Вольфрама «Правило 30»; 3Б – КА Д. Конвея «Игра Жизнь»; 3В – обратимый КА Фредкина с тремя состояниями; 3Г – как происходит работа Автомата Фредкина на ограниченной решётке.

Обратим внимание на Рис.3В, т.н. Автомат Фредкина (давайте его называть так, по имени того, кто его первым придумал [4]). Он имеет ТРИ состояния: **A**, **B**, **C**. В нём, мы рассчитываем некую булеву функцию, зависящую только от клеток **C** попавших в окрестность «**f(C)**». И в зависимости от функции **f** делаем соответствующие преобразования (см. рис. 3В).

Назовём транслитерацией замену всех **C** на **B** и **B** на **C**. Тогда легко доказывается следующее положение: если в автомате Фредкина сделать транслитерацию, потом один ход вперёд и потом снова транслитерацию … то мы найдём **предыдущее** состояние [5]. То есть этот Автомат – обратимый.

Начальное состояние нашего КА Фредкина состоит только из клеток **A** и **B**. То есть клеток C нет совсем, и будем считать, что **f(C)** в таком случае равно 0. Это **ещё одно** наше условие на Автомат.

То есть Автомат (клеток **C** - нет) соответственно перейдёт в клетки **A** и **C,** то есть в свою транслитерацию. И дальше надо смотреть синхронно два движения. Одно вперёд по времени, другое – назад. На каждом новом шагу состояния «вперёд и назад» будут транслитерациями друг друга. И если число состояний конечно, то обязательно возникнет момент когда следующим ходом «вперёд» мы получим его транслитерацию – ход «назад». Будем говорить, что мы достигли Точки Зеркала, или Точки Полупериода (возвращения). Далее движение повторяется по кругу. (Рис.3Г).

3. Облегчённый обратимый Автомат Фредкина и «проблема числа 3» в не формальном виде

Давайте «облегчим» Автомат Фредкина. То есть уберём из определения функции **f(C)** слово «любая» и скажем, что **f(C) = 0** если в данной окрестности НЕТ С клеток, и **f(C) = 1** если в данной окрестности они ЕСТЬ. Этот Автомат и будет предметом нашего рассмотрения.

Рис. 4. 4А – Облегчённый КА Фредкина (ОАФ). 4Б – Осевой Автомат для того же ОАФ (для той же Маски).

Почему именно он будет «предметом»?.. Потому что, **именно он** демонстрирует (В ОТЛИЧИЕ ОТ ВСЕХ ОСТАЛЬНЫХ АВТОМАТОВ ФРЕДКИНА(!)) совершенно удивительное и парадоксальное поведение. Все остальные Автоматы (и что совершено понятно!) – «разрушаются» со временем. (Большая часть «случайных» АФ «уже рождается» разрушенной…)

https://www.youtube.com/edit?o=U&video_id=wFfWCMyvi7k

И только наш ОАФ – грубо говоря, ВЕЧЕН! Он не «умирает в Гиперцикле» (цикл по которому идёт обычный АФ имеет совершенно невообразимое число шагов), а через некоторое (небольшое) время вновь возникает в начальном состоянии.

https://www.youtube.com/watch?v=Y38RNvRHUCc

Вот это обстоятельство, (объяснить **глубокую странность** поведения некоторых (многих) ОАФ) мы и назовём **«проблемой числа 3» в неформальном виде**. («Три» у нас пока – только «три состояния». Потом это число ещё не раз появится в нашем изложении). Это своя особая задача (объяснить все парадоксы ОАФ) – мы о ней говорить не будем... Но зато докажем для этих ОАФ очень интересную Теорему.

4. Нормальные Маски. Тестовый Плот. Основная (Большая) Лемма. Строгая постановка «проблемы числа 3»

Приведём математически строгое определение «проблемы числа 3». Но, до этого, поговорим о том: ОАФ с какими Масками (окрестностями) мы будем рассматривать.

Мы будем рассматривать только Маски содержащие **Маску Неймана** (https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Neumann_neighborhood) в N измерениях. (Мы назоваем такие Маски - *Нормальными*).

Теперь ограничим со всех сторон наш Автомат. Далее… Представим себе шахматную фигуру, которая ходит на в N- мерной решётке на один шаг вперёд или назад по любой из осей (то есть как раз по окрестности Неймана) и которой, при этом *разрешено* ходить по тем полям, на которых она уже была. Очевидно, что ей можно обойти любой конечную Решётку (Z^N) и вернутся в начальную точку.

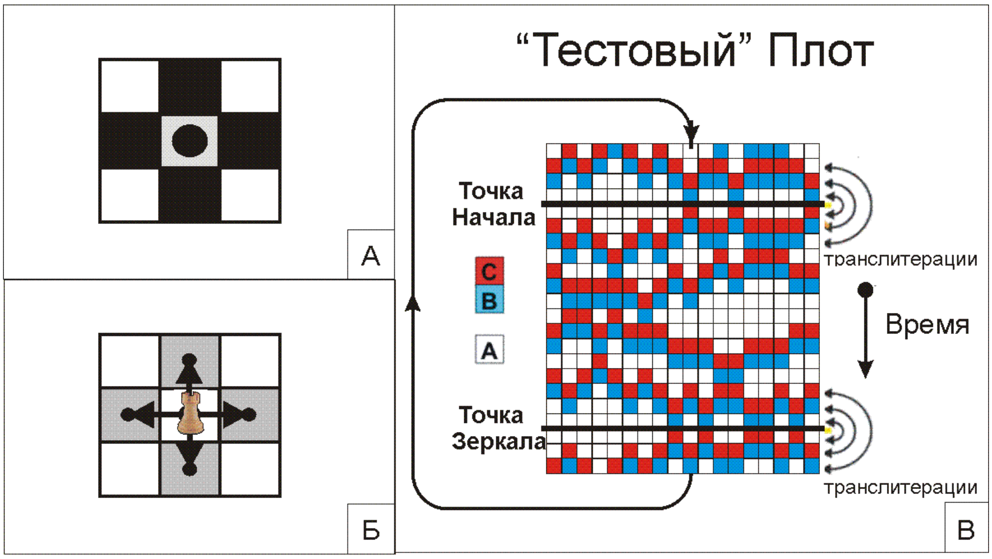

Рис. 5. 5А – окрестность Неймана для двух измерений. 5Б – ходы «шахматной фигура «разворачивающей» решётку в двух измерения в одно. 5В – Тестовый Плот. Иллюстрация не пересечения СВ полос. (Картинка приведена для некой одномерной Маски).

Игнорируя («не допуская») бессмысленные ходы (вперёд и сразу же назад), ходом этой фигуры разворачиваем любую ограниченную область из N измерений в одно. После этого подкладываем каждое следующее положение КА **под** предыдущее… и, в конце концов, получаем т.н. **Тестовый** Плот. От двух переменных. По оси **x** развёртка нашей шахматной фигурой КА в одно измерение (мы эту развертку обозначаем на рисунках буквой ***r***; при больших измерениях сама окрестность, как-то размажется по оси **x**, но для нас это неважно) По оси **y** (она у нас направлена вниз) – время. И доказываем **предварительную Лемму**…

Лемма.

Если ОАФ содержит Маску Неймана, то верно следующее:

1). Точка Зеркала,(для любого нетривиального; с периодом возвращения >2 ОАФ) не равняется Точке Начала.

2). Точка Зеркала, как и Точка Начала содержит исключительно ***А*** *и* ***В*** *клетки.*

3). Каждая клетка С *на* ***Тестовом*** *Плоту обязательно касается другой клетки* С *с каждой стороны и* ***только один раз****. То есть линии* ***СВ*** *на плоте идут на Тестовом Плоту не пересекающимися полосами.* (Рис.5с)

Эта очень не сложная Лемма доказывается в [2]. И сразу же даём строгое определение «проблемы числа 3».

Имеется наблюдение…

Что *для* **некоторых Масок, которые мы назовём *Совершенными*, для любых размеров КА и для любых начальных условий** верно следующее...

Возьмём произвольные н.у. состоящие только из **А** и **В**, и удалим из неё на Тестовом Плоте все клетки **В**. (Это очень удобно делать полосами; «одну», «вторую», «третью»…) А потом «подберём» все клетки (они могут быть – либо «**А**», либо «**С**»), как костяшки домино 1 на 1, наверх, к Точке Начала (точные формулы приведены в [1]).

В конце концов, получим таблицу (от точки Начала до Точки Зеркала) имеющую по оси **y** Θ строк и заполненную клетками **А** и **С.**

Теперь возьмём «дополнительную» начальную раскраску. То есть поменяем все клетки **А** на **В**, а **В** на **А**. И сделаем ту же процедуру. Получим таблицу, имеющую по оси **y** Θ^* строк и так же заполненными клетками **А** и **С.**

Требуется доказать, что для *Совершенных* Масок (рис. 1) Θ всегда будет равна Θ^*, а сами полученные таблицы совпадут между собой при замене всех **A** на **C**, а **C** на **A**.

«Проблема числа 3» - доказать это наблюдение!

5. Первые два этапа. Теорема 1. Доказательство существования у Автомата с *Совершенной* Маской *Осевого* Автомата

(В работе [1] этот Автомат назывался *Табличным*. Мы решили сменить название, чтобы подчеркнуть его **центральное положение** между «миром Обычным» и «миром Дополнительным (Параллельным)» и назвать его *Осевым*»).

В работе [1] доказывается следующая…

Теорема 1. (Теорема о *Правильности*).

Что для всех Масок с рисунка 1, которые не закрашены чёрным цветом и у которых n<9 существует некий *Осевой* Автомат с **k=6** (рис. 4Б) с соответствующими ТП: R_{-x}, R_{-y}, R_{-z}, R_{+x}, R_{+y}, R_{+z}; причём все ТП получаются из R_{-x} своими подстановками:

(1)

… и обладающий удивительными свойствами! Но сначала…

Первый этап.

Как находятся наши ТП? Они вычисляются *в предположении* что соответствующая Маска *Совершенна* следующим образом… Проводятся испытания, со случайным (конечным) размером решётки и случайными начальными условиями. После того как Автомат достигает своей Точки Зеркала (Полупериода) производится «подбор» как сказано в Главе 3 с сохранением числа *F* (номер шага на котором он получился) и соответствующим индексом (F_A или F_C) в зависимости от того, что было написано на данной «костяшке». После чего производится замена следующая замена: $F_A(mod\ 3)=0 \Leftrightarrow$«-x», $F_A(mod\ 3)=1 \Leftrightarrow$«-x», $F_A(mod\ 3)=2 \Leftrightarrow$«-x», $F_C(mod\ 3)=0 \Leftrightarrow$«+x», $F_C(mod\ 3)=1 \Leftrightarrow$«+y», $F_C(mod\ 3)=2 \Leftrightarrow$«+z».

Данные результаты и подставляются как соответствующие Таблицы Перехода: R_{-x}, R_{-y}, R_{-z}, R_{+x}, R_{+y}, R_{+z}. (Подробно, с примерами, всё это описано в [1]).

Второй этап. Таким образом, определён новый КА. Он стартует на той же решётке что и ОКФ, но с соответствующей заменой **A** и **B** на «–x» и «+x» и обладает очень малой «плотностью», то есть отношением «числа строк в всех матрицах *R*» к «максимальному числу возможных строк» (6^{n+1}). Для большинства наших *Совершенных* Масок (рис. 1) это несколько процентов. Но по индукции доказывается, что никаких других строк при работе КА возникнуть **и не может**! (Так же по индукции доказывается, что *Осевой* Автомат обратим, и матрицы для обратных R^{-1}_{-x}, R^{-1}_{-y} и т.д. Автоматов так же получаются из R_{-x}, соответствующими подстановками (см. [1]). Те Маски, для которых существует *Осевой* Автомат мы назвали *Правильными*.

(В самом доказательстве интересно лишь то, что оно *всегда* доходит до конца. Больше никаких особых идей в нём и нет. Это традиционное доказательство «полным перебором» и «по индукции»).

Осевые Автоматы – самоценны. Это некие новые симметрии, которых, на самом деле, очень и очень много.

Возьмём некую окрестность в духе работы [3]:

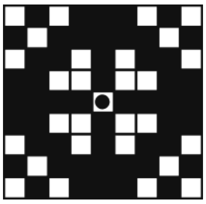

Рис. 6. Некая симметричная Маска (окрестность) в двух измерениях с n=49.

Спросим математика, какую симметрию он имеет? Он ответит: «симметрию квадрата»; симметрией по осям «x», «y» и по диагоналям. Но, оказывается… это будет **не полный** ответ!

Существует **ещё одна** симметрия (по сути это просто таблица R_{-x}), что само по себе очень интересно! То есть, то что она есть, мы убеждены на 100%. (Таблица R_{-x} – *Осевой* Автомат – существует для огромного числа **вообще не симметричных** Масок; наверняка существует для всех центрально- симметричных Масок (ясно из косвенных данных); а уж для Масок обладающих симметриями квадрата??!..) Просто чтобы её (таблицу R_{-x}) определить нужен *очень* хороший компьютер. А для того, чтобы доказать *Правильность* этой таблицы R_{-x} (это – «нашим» способом: «тупым перебором», «в лоб»!) нужен *очень- очень* хороший компьютер (каких нет!) «Вложенный цикл из несколько тысяч значений и глубиной 50…» - это что-то очень странное! Но для маленьких **n** (у нас **n<9**) со всеми тремя задачами: «нахождением ТП» и «доказательством *Правильности*» и в дальнейшем (как будет показано в следующей Главе) «доказательством *Совершенства*» домашний компьютер справляется без труда.

Давайте перейдём к этому последнему этапу: доказательству *Совершенства* из *Правильности*.

7. *Объединённый* Тестовый Плот. Приведённые Линии ОАФ и *Осевого* Автомата. Тестовый Плот *Осевого* Автомата

(Мы произвели замену терминологии в сравнении с [1]. То что в [1] мы называли «половинками Струн» теперь мы называем «Приведёнными Линиями»).

Объединение на одном Тестовом Плоту двух прохождений: одно с «какими-то» н.у. ($f_{ABC}(t,r)$) а другое с «дополнительным к ним» ($f^*_{ABC}(t,r)$) мы назовём ***Объединённым*** Тестовом Плотом (ОТП). На рис. 7 и 8 как раз и приведены примеры различных ОТП. (В виде мультфильма см. https://youtu.be/08bxuG7lm0A)

Введём понятие *Приведённой Линии с индексом f*: (P_f, P_f^*) и функцию *значений* на Приведённых Линиях (V_f, V_f^*). (Индекс «*f*» говорит о том что Приведённые Линии определятся непосредственно из Тестового Плота. Будет ещё и другое определение). В принципе его можно ввести для любого Автомата Фредкина, но мы рассмотрим его только для ОАФ с *Нормальными,* как *Совершёнными* так и *Несовершёнными* Масками.

Определение.

Приведённой Линией $P_f(\tau, r, \text{"In."})$ называется целая функция $(P_f \quad Z)$ от трёх переменных $(\tau, r, \text{"In."})$; где $\tau, r \quad Z$, а *“In.”* – некоторые (любые) начальные условия. Определение даётся по индукции…

1) $P_f(0, r, \text{"In."})=0;$ с индукционным шагом:

(2)

(По сути, это и есть тот «подбор вверх» (см. главу 3) о котором мы говорили). Плюс аналогичное определение для функции $P^*_f(\tau, r, \text{"In.*"})$...

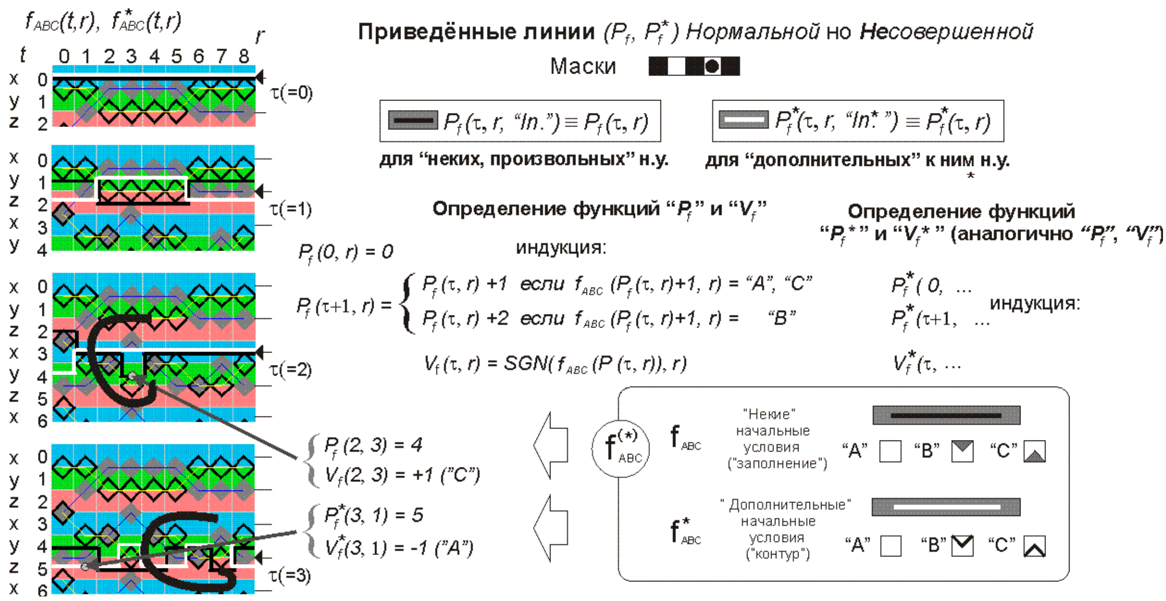

Рис. 7. Слева на рисунке ОТП в *Нормальной* но *Несовершённой* Маской. Чёрными и белыми линиями нарисованы Приведённые Линии для нескольких первых значений τ. Видно, что P_f и P_f^* не симметричны относительно «осевой линии» – абсциссы с координатой t=3τ/2. («Ошибки» симметрии показаны толстой линией).

Введём функцию *sgn* (знака) для величин *{-x, -y …} (sgn(-x)=-1, sgn(+x)=1, sgn(-y)=-1 …)*; и функцию *SGN* для клеток **A**, **C**: *SGN*(A)*=-1; SGN*(C)*=1*, (*SGN(*B) – не определена). И запишем с помощью этих обозначений функцию значений на Приведённой Линии для «произвольных» н.у. *"In."*: $V_f(t,r,\text{"In."}) = SGN(f_{ABC}(P_f(t,r,\text{"In."}),r))$; и аналогичную функцию $V_f^*(t,r,\text{"In."}) = SGN(f_{ABC}(P_f^*(t,r,\text{"In.*"}),r)))$ для «дополнительных». Это и есть те величины, которые получились бы у нас «подбора вверх» из Главы 3. Никакой связи между величинами V_f и V_f^* для *Несовершенных* Масок не обнаруживается.

Теорема 1 (см. [1]) говорит, что для тех Масок, для которых существует *Осевой* Автомат (*Правильных*) можно определить то, что мы сейчас назовём Тестовым Плотом *Осевого* Автомата. Он получается занесением работы *Осевого* Автомата, каждый раз, в новую строку с номером τ. И Приведённые Линии (уже на *Объединённом* Тестовом Плоте) со своими значениями *(P, P*,V,V*)*, без индекса «*f*» получаются по известным формулам (см. [1]; рис. 8Г).

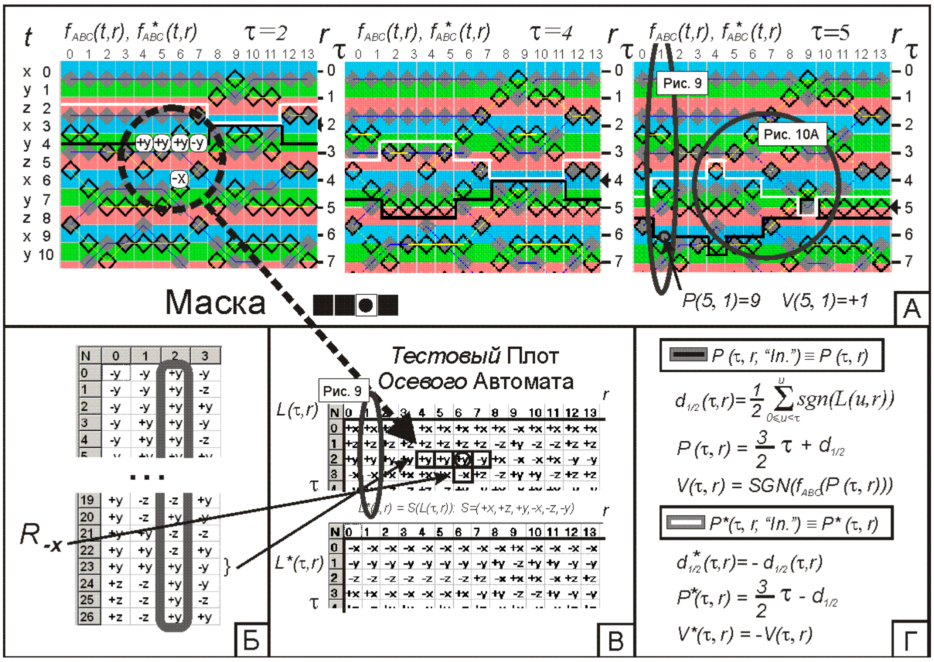

Рис. 8. 8А – *Объединённый* Тестовый Плот для *Правильной* Маски (3,1) с тремя значениями Приведённых Линий построенных по формулам 8Г для τ=2, τ=4 и τ=5. Видно, что они симметричны относительно прямой (t=3τ/2) совпадают с P_f и V_f. 8Б – Таблица R_{-x} для Маски (3,1). 8В – Результаты работы *Осевого* Автомата (тоже Тестовый Плот). 8Г – формулы из [1], касающиеся *Осевого* Автомата (мы их ещё раз проиллюстрируем, на конкретном примере, для τ=5, *r*=1 на рис. 9).

Стрелками показана взаимосвязь между рис 8А, 8Б, 8С на примере одной точки (*t=6, t=2, r=6*; н.у. - «произвольные»). Овалами – те области, которые выносятся в другие рисунки.

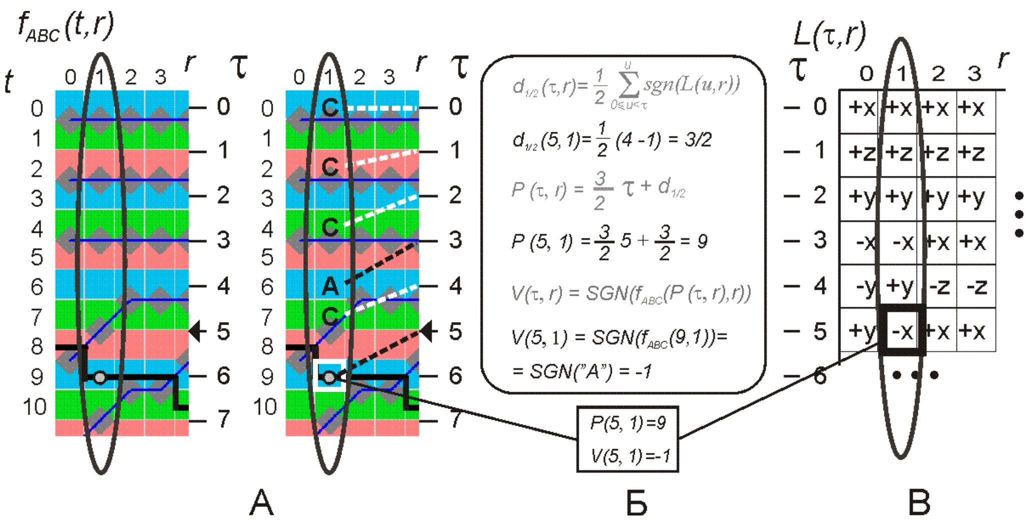

Рис. 9. Подробное вычисление величин *P(5,1)* и *V(5,1)* из рис. 8. 9А – Тестовый Плот для «неких» н.у. и Приведённой Линией с τ=5; 9Б – производимые вычисления; 9В – Тестовый Плот *Осевого* Автомата.

7. Завершение доказательства *Совершенства* первых *Нормальных Правильных* Масок. Доказательство тождественности Приведённых Линий (P_f,V_f) и (P,V)

Нам надо доказать что для любой Правильной Маски $P_f(\tau,r) = P(\tau,r)$ и $V_f(\tau,r) = V(\tau,r)$. Посмотрим, какие ещё проверки Таблиц Перехода нужно сделать, чтобы это можно было утверждать?

Теорема 2. (Теорема о *Совершенстве*).

Проведём доказательство, по индукции, что для любой Правильной Маски с рис.1 с n<9, и для любого τ, Приведённые Линии с индексом «*f*» (P_f, V_f, P_f*, V_f*; Приведённые Линии Тестового Плота) совпадут с Приведёнными Линиями без индекса «*f*» (*P, V, P**, *V**; Приведёнными Линиями Тестового Плота *Осевого* Автомата). (Давайте говорить только о Приведённых Линиях P_f, V_f, *P, V*; для Приведённых Линий P_f*, V_f*, *P**, *V** всё доказывается аналогично).

Тест 1.

Назовём те пары клеток (столбцов) в ТТ которые не имеют пар (-x,y), (+x,-z), (-y,+z) *хорошими*, и построим не направленный граф на клетках Маски из этих пар. Если по этим рёбрам графа из центральной клетки можно пройти во **все** клетки Маски, то назовём **Тест 1** для Маски **пройденным**. Все *Правильные*, с n<9, Маски с рисунка 1 проходят этот тест. Во всех одномерных Масках с «естественной» нумерацией клеток (подряд) – это два простых пути из центральной клетки налево и направо.

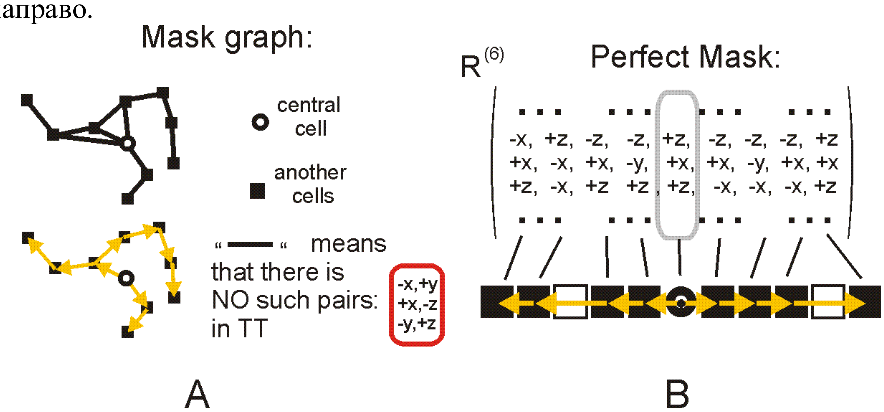

Рис. 10. Панель А – пример нашего графа для гипотетической Маски с n = 9; панель В показывает путь обхода клеток для Совершенной Маски (25,23). На обоих панелях (а так же на остальных рисунках) вектора обхода нарисованы жёлтым.

Индукция ведётся по τ, и, одновременно, доказывается, что и условие (3) тоже продолжает выполняться. Условие такое: для всех векторов всех путей обхода, где r_a - начало вектора, а r_b – конец, выполняется:

(3)

См. рис. 11:

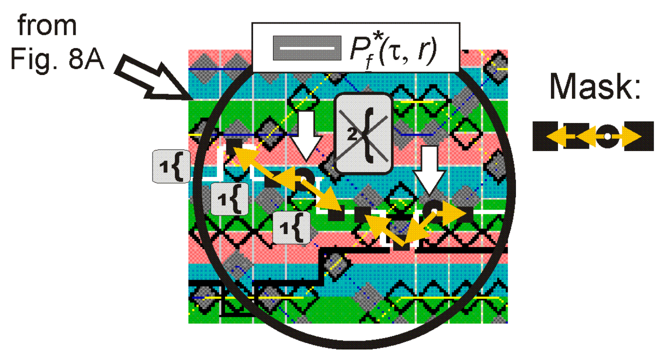

Рис. 11. Иллюстрация формулы (3) для реальной Приведённой Линии *P*(τ,r)* с рис. 8.

Формула (3) несёт для нашего доказательсвтва две функции.

С одной стороны, выполнение формулы 3 позволяет нам правильно расставить начальные литеры **A** и **C** для индукционного шага; см. рис 12:

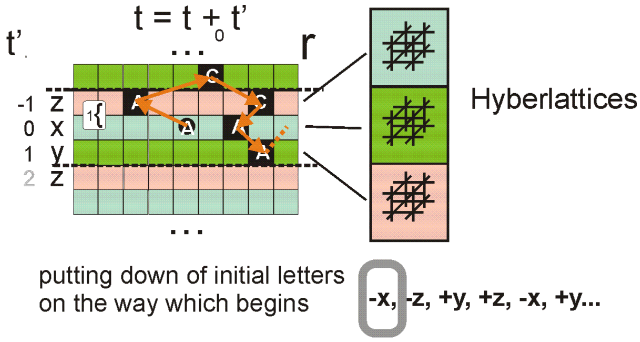

Рис 12. Постановка букв строки ТП на пути одного обхода некой гипотетической Маски.

А, с другой стороны, если мы для всех строк Таблиц Перехода докажем, что лежащая под центральной клеткой буква всегда правильно восстанавливается **исключительно из содержимого этой строки**, то это докажет нам всю Теорему целиком, причём вместе с выполнением (дальнейшим) формулы (3)! Поясним это подробнее…

Предположим, что Тест1 и Тест2 (правильное восстановление следующей буквы из нашей строки; см. далее) выполнены, и предположим, что формула (3) перестала выполняться. Возьмём первый шаг τ, на котором образовалась δ_{ab} равная двум. И смотрим на рис.13…

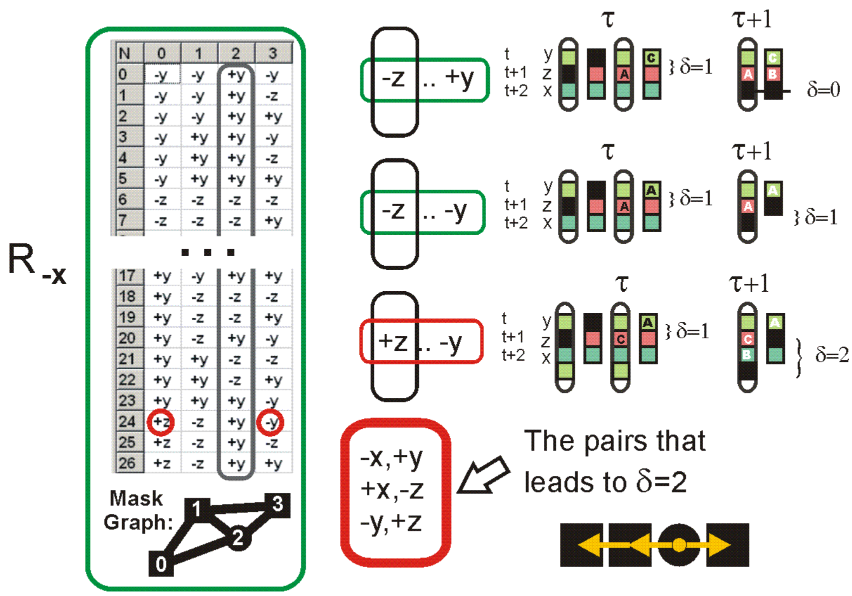

Рис. 13. Объясняет, что δ никогда не сможет стать двойкой на примере ТП R_{-x} для Маски (3,1).

За один ход (увеличении τ на 1), если литера имеет «+», Приведённая Линия Автомата смещается вниз на две клетки. А если имеет литеру «-» – то на одну клетку. (Поэтому ясно, что δ не может сразу стать, скажем, тройкой. Оно обязательно должно пройти через $\delta = 2$).

Выясняется, что только редкие пары могут сделать δ равную двум. Это как раз наши пары (-x,+y), (+x,-z), (-y,+z), в которых одна из величин стоит в начале вектора обхода, а вторая в конце. Но их нет в наших ТП по пути обхода. И получится они (из Теоремы 1) не могут!.. Противоречие. Следовательно δ так и останется, по модулю, меньше двух.

Осталось сделать последнюю решающую проверку…

Тест 2.

Давайте говорить о проверке в общем случае, сложной Маски, в N измерениях. Как она производится?.. Берётся, поочерёдно, какая-то строка из ТП (напомним, что проверка осуществляется для **всех строк** ТП!.. Выделяется несколько (четыре, для начала; если не хватит, добавим ещё, и начнём проверку с нуля) пустых Гиперкуба измерения N, и по всем направлениям больше рассматриваемой Маски в несколько раз (достаточных чтобы содержать все Маски «второго порядка»; см. Теорему 1), и нумеруем их по времени t': … t'=-2, t'=-1, t'=0, t'=1, t'=2. После чего начинаем «восстанавливать» наш урезанный «Тестовый Плот» из того что есть.

В центр нулевого» куба ставится **A** или **C** в зависимости от sgn- ма величины в строке, в «центральной» точке; если *sgn = -1* ставится **A**, если *sgn =+1* ставится **C**. А «нулевой» Гиперкуб получает «литеру» нашей строки в центральной точке.

Записываются соответствующие литеры для кубов с номерами … -2, -1, +1, +2 (см. рис 11). Заносятся в Гиперкубы, по путям обхода, все литеры (рис. 12) нашей строки исходя из смещений. Во все остальные клетки Гиперкубов заносится число «-1» – знак того, что значение пока не известно. (См. рис 14).

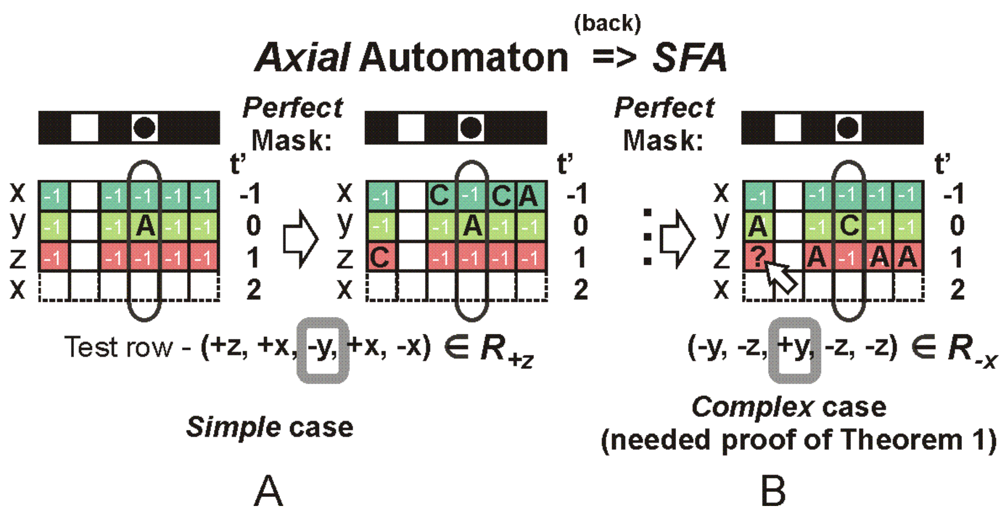

Рис.14. Начало тестирования двух строк из ТП R_{+z} и R_{-x} для Маски (5,3). Строки бывают *простыми* и *сложными* для анализа. Большинство строк в любой ТП (678 из 702 для маски (5,3)) – *простые*. То есть нужное нам значение быстро вычисляется непосредственно из самой строки. Но существуют и *сложные* случаи (24 из 702 для маски (5,3)). Когда за завершением теста приходится обращаться к Теореме 1, и смотреть, из чего вообще такая строка могла получиться.

И начинаем восстановление в условиях «недостатка информации». Просматриваются все клетки, которые равны -1, и для которых можно определить значение **f(C)** и соответственно значение букв **A**, **B** или C в данной клетке Гиперкубов. Конечная цель: установить литеру (в каком Гиперкубе находится следующая буква **A** или **C;** в гиперкубе с номером 1, или с номером 2) и «что это за буква» – сразу под нулём «нулевого» Гиперкуба.

Если определить это не удалось (там стоит -1), или «определили, но литера или знак не совпадает с индексом Таблицы Перехода, откуда мы эту строку взяли» – Проверка №1 (*для всей Маски!*) считается не пройденной! И так, раз за разом, проверяем все 6С строк…

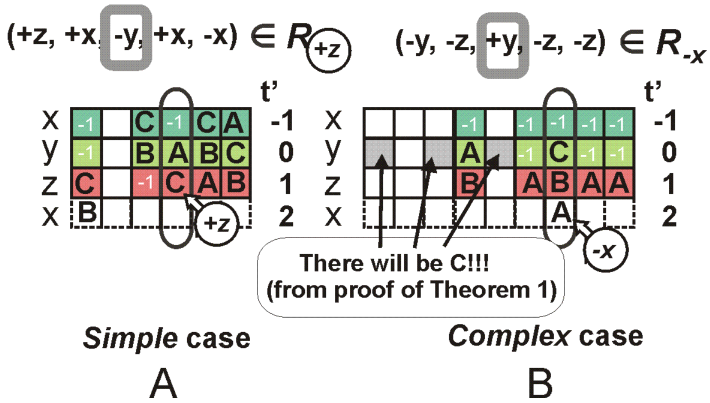

Рис. 15. Окончание Теста 2 для двух строк с рис. 14. Видно, что и в первом и во втором случае Тест 2 пройден.

И, внезапно, выясняется… что все Правильные Маски (рис. 15) с рис. 1 с проверкой **справляются**! (На рисунке 16 – проверка ТП R_{-x} нашей «любимой Маски (3,1)»).

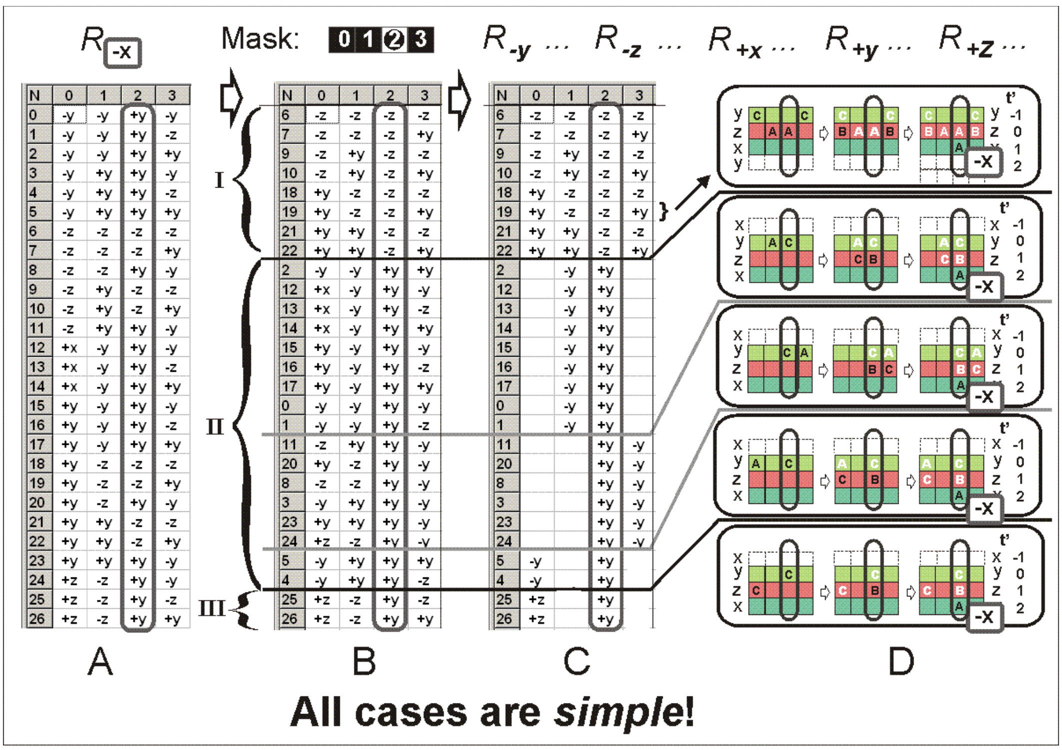

Рис. 16. 16А – ТП R_{-x} для Маски (3,1). 16Б – Таблица 16А сортируется (для наглядности) и собирается в однотипные кластеры. 16В – те части строк, которые не участвуют в восстановлении, закрываются белыми «шторками». 16Г – восстановление литеры согласно написанному ранее. Действия выполняются слева направо. После выполнения очередного действия, буквы делаются «белыми»; вновь появившиеся – рисуются «чёрным». Видно, что во всех случаях правильно восстанавливается буква «-x».

Что с учётом сказанного ранее и доказывает Теорему! **Для всех τ и r…**

(4)

Следствие.

Все *Правильные* Маски с $n<9$ с Рис.1 – *Совершенны*.

В соответствии с формулами **из рисунка** 9Г (см. [1]) для *Осевого* Автомата, вид «подобранных наверх» матриц для ОКФ с «произвольными» и «дополнительными к нам» будет повторять матрицы L и L^* с заменой всех «отрицательных» литер на **A**, а всех «положительных» литер на **C**. Но мы знаем что L и L^* связаны отношением $L=S(L^*)$, где S – подстановка (+x,+z, +y, -x, -y, -z). То есть плюсы меняются на минусы и наоборот. Следовательно, все рассматриваемые Маски с рис. 1 – *Совершенны*.

Следствие.

Все *Правильные* Маски с $n<9$ с Рис.1 – *Совершенны*.

В соответствии с формулами **из рисунка** 9Г (см. [1]) для *Осевого* Автомата, вид «подобранных наверх» матриц для ОКФ с «произвольными» и «дополнительными к нам» будет повторять матрицы L и L^* с заменой всех «отрицательных» литер на **A**, а всех «положительных» литер на **C**. Но мы знаем что L и L^* связаны отношением $L=S(L^*)$, где S – подстановка (+x,+z, +y, -x, -y, -z). То есть плюсы меняются на минусы и наоборот. Следовательно, все рассматриваемые Маски с рис. 1 – *Совершенны*.

5. Какие проблемы ещё остаются?

Понятие *«Нормальности»* немного излишнее, поэтому давайте введём понятие *«Общей нормальности»*.

Определение.

«Общенормальной» – называется такая Маска в N- измерениях, которая (см. рис. 17) которая в направлении каждой из осей имеет одну из соответствующих частей, либо (1) (как у *Нормальной* Маски), либо (2) (симметрично лежащие «доминушки», в направлении соответствующей оси). Очевидно, что этого тоже достаточно, чтобы работала **предварительная Лемма**.

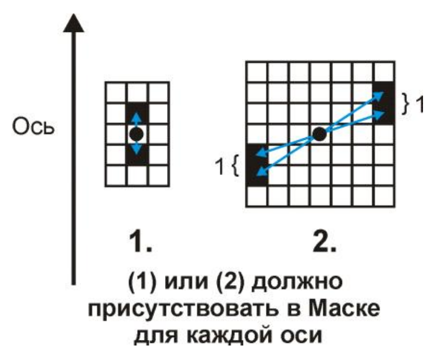

Рис. 17

Возникают две очевидные проблемы…

Проблема 1. Доказать (опровергнуть?), что любая *Общенормальная, центрально- симметричная* Маска – *Совершенна*.

Проблема 2. Научится определять *Совершенство* Маски непосредственно из её вида.

Предлагаю назвать новую математическую Дисциплину, которую мы развиваем, *дискретной* ***Геометрией.*** Это было бы очень хорошо!

6. Заключение

В математике известны конечные простые группы. Как пишут в учебниках, это всё вращение некоторых многогранников в N – мерном пространстве. И как утверждает «Грандиозная Теорема Математики» **–** их, в совокупности, совсем не много.

Мы поступили по другому…

Мы проникли *внутрь* одной клетки N – мерной решётки и посмотрели на вещи «оттуда».

И, посмотрев… внезапно обнаружили *россыпи, лавины, водопады* самых неожиданных и удивительных симметрий. Их НАСТОЛЬКО много, что это не может не вызывать, у любого сталкивающегося с этим обстоятельством математиком лёгкую оторопь.

7. Благодарности

Автор выносит большую благодарность доктору В. Беляеву, доктору Е. Московцу и доктору М. Ольшаны за чтение данной статьи и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A.Kornyushkin. Theory of mathematical strings: the first steps. Int J Inf Res Rev; Vol. 03: Issue No: 09 (2016) 1296.pdf

[2] A. Kornyushkin. The X-problem of number 3. http://arxiv.org/abs/1308.0136

[3] A. Kornyushkin. *About a Discrete Cellular Soliton (computer simulation).* http://arxiv.org/abs/1109.4552.

[4] Margolus, Norman (1984) "*Physics-like models of computation*", Physica D: Nonlinear Phenomena **10**: 81–95, Reprinted in Wolfram, Stephen, (1986) *Theory and Applications of Cellular Automaton*, Advanced Series on Complex Systems **1**, World Scientific, pp. 232–246; A. Adamatzky (Ed.) (2002) *Collision-Based Computing*, Springer-Verlag, , pp. 83–104.

[5] Toffoli T., Margolus N. (1987) *Cellular Automaton Machines: A New Environment for Modeling*, MIT Press Series, Section 14.2, "*Second-order technique"*, pp. 147–149; Wolfram, Stephen (2002), *A New Kind of Science*, Wolfram Media, pp. 437.; McIntosh, H. V. (2009) "*One Dimensional Cellular Automaton*", Luniver Press, pp. 205–246.

Приложение 1.

Смена терминологии по сравнению с [1].

Как называлась в [1]	Как называются сейчас
Простой Автомат	Облегчённый Автомат Фредкина (ОАФ)
Табличный Автомат	*Осевой* Автомат
Струны 1-ая половинка, 2-ая половинка	Струны (остались) Приведённая Линия ОКФ с «произвольными» н.у Приведённая Линия ОКФ с «дополнительными» н.у